

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

Кафедра физики высоких энергий и элементарных
частиц

Направление «Физика»



Исследование критических явлений в модели
Поттса.

Бакалаврская работа студента

_____ Серова Виталия Дмитриевича

Научный руководитель:

_____ д.ф.-м.н., доц. **Компаниец М.В.**

Рецензент:

_____ д.ф.-м.н., проф. **Аджемян Л.Ц.**

Санкт–Петербург

2017

Содержание

1	Введение	3
2	Модель Поттса и перенормировки	4
2.1	Формулировка модели	4
2.2	Функции Грина	4
2.3	Введение диаграммной техники для функций Грина	5
2.4	Размерная регуляризация и ультрафиолетовая мультиплика- тивная перенормировка	7
2.5	Ренормгруппа и РГ-функции, критические индексы	8
3	Вычислительный аппарат	10
3.1	Метод вычисления простых диаграмм	10
3.2	Интегрирование по частям (IBP Reduction)	11
3.3	KR' -операция	12
3.4	Симметричные коэффициенты	13
3.5	Тензорные свёртки	14
4	Полученные результаты	16
5	Заключение	19

1 Введение

Данная работа посвящена изучению модели, предложенной Р. Б. Поттсом [1]. Она является обобщением модели Изинга, описывает спиновую решётку, в которой взаимодействие предполагается только между соседними спинами, но сами они могут принимать не 2 положения, а $n + 1$. Изначально её изучение проводилось матричным методом Крамерса и Ваньира [2]. Дальнейшее развитие достигалось использованием метода размерной регуляризации и перенормированием т'Хофта и Вельтмана [3], например, в работе Эмита [4]. Особый интерес к модели возникает при изучении явлений перколяции [5].

Основным объектом исследования в данной модели является поведение в окрестности критических точек. Для этого привлечён мощный вычислительный аппарат квантополевого ренормгруппы. В таком подходе для поиска типа критического поведения необходимо устранить появляющиеся в теории расходимости, после чего вычислить и проанализировать ренормгрупповые функции (РГ-функции) [6]. При нахождении ИК-притягивающей фиксированной точки возможно скейлинговое поведение функций Грина, универсальные характеристики которого (критические индексы) зависят только от симметрий модели и рассматриваемой размерности пространства. Они вычисляются в виде рядов по параметру $\epsilon = \frac{6-d}{2}$, который является отклонением от критической для перенормируемости размерности $d = 6$. Для этого удаётся сформулировать диаграммную технику для функций Грина, с помощью которой строится теория возмущений и затем вычислить РГ-функции.

В настоящей работе найдены РГ-функции модели в двухпетлевом приближении, по ним определены ϵ -разложения для критических индексов, для которых построены графики зависимости от параметра n при рассмотрении пространств нескольких размерностей. Уделяется внимание поиску критических значений n_{cr} , при которых происходит смена типа поведения.

2 Модель Поттса и перенормировки

2.1 Формулировка модели

Рассматривается теория с $n + 1$ —компонентным полем со взаимодействием типа ϕ^3 с функционалом действия вида:

$$S(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^i)^2 + \frac{g_0}{6} d_{ijk} \varphi^i \varphi^j \varphi^k. \quad (1)$$

Здесь и далее подразумевается интегрирование по всему пространству с размерностью $d = 6$, а также суммирование по 2 повторяющимся латинским индексам. g_0 —константа связи (заряд), а тензор d_{ijk} отражает группу симметрий теории. В рассматриваемом случае он является полностью симметричным по перестановкам индексов и может быть записан с помощью набора векторов, которые отождествляются с положениями спинов:

$$d_{ijk} = \sum_{\alpha=1}^{n+1} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha, \quad i, l, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Их явный вид можно найти, например, в [7], но для дальнейших вычислений достаточно привести только следующие соотношения для них [5]:

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} e_i^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{n+1} e_i^\alpha e_j^\alpha = (n+1)\delta_{ij}, \quad e_i^\alpha e_i^\beta = (n+1)\delta^{\alpha\beta} \quad (3)$$

2.2 Функции Грина

В общем случае, исходя из данного действия, строятся производящие функционалы для функций Грина (под которыми подразумевают усреднение значений поля в нескольких точках):

$$G(A) = \exp[W(A)] = c \int D\varphi e^{-S(\varphi) + A\varphi}, \quad A\varphi \equiv \int dx A(x) \varphi(x). \quad (4)$$

Здесь A —произвольная функция от тех же аргументов, что и поле (источник). $G(A)$ соответствует полным ненормированным, а $W(A)$ —связным функциям Грина. Выражение содержит континуальный интеграл, множитель c является нормировочным, получается при подстановке в функционал свободного действия, содержащего только квадратичные по полю вклады. Непосредственно функции Грина можно получить вычислением вариационных производных от функционала по его аргументу, например:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n G(A)}{\delta A(x_1) \dots \delta A(x_n)} \Big|_{A=0} = c \int D\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) e^{-S(\varphi)}. \quad (5)$$

Удобно работать с 1-неприводимыми функциями Грина, производящий функционал для которых определяется с помощью преобразования Лежандра от производящего функционала для связанных:

$$\Gamma(\alpha) = W(A) - \alpha A, \quad \alpha(x) = \frac{\delta W(A)}{\delta A(x)}, \quad \Gamma_n = \frac{\delta^n \Gamma(\alpha)}{\delta \alpha^n}. \quad (6)$$

Все вычисления в данной работе производятся в импульсном представлении, поэтому для любых функций Грина вводится их преобразование Фурье:

$$\tilde{\Gamma}_n(p_1, \dots, p_n) = \int dx_1 \dots dx_n \Gamma_n(x_1, \dots, x_n) \exp[-i \sum_l p_l x_l]. \quad (7)$$

2.3 Введение диаграммной техники для функций Грина

Для производящих функционалов можно ввести диаграммную технику. Она основана на вычислениях гауссовых интегралов, которые понятным образом считаются даже в тех случаях, когда они континуальные:

$$\int D\varphi \exp[-\frac{1}{2}\varphi K \varphi + A\varphi] = \frac{1}{\sqrt{\det(\frac{K}{2\pi})}} \exp[\frac{1}{2}AK^{-1}A], \quad (8)$$

где $\varphi K \varphi$ —квадратичная форма с заданной линейной симметричной операцией K , $A\varphi$ —линейная форма типа (4). При отсутствии A получается ответ для нормировочного c из (4)

Ключевым понятием в такой науке является свободный пропагатор Δ , определяемый из свободной части действия:

$$S_0 = \frac{1}{2}\varphi K \varphi, \quad \Delta = K^{-1}. \quad (9)$$

С его помощью определяется операция приведения, позволяющая строить разложение для негауссовых интегралов:

$$P \equiv \exp \left[\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi} \Delta \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] \equiv \exp[D/2], \quad D \equiv \int \int dx dx' [\delta/\delta \varphi(x) \Delta(x, x') \delta/\delta \varphi(x')]. \quad (10)$$

Её свойства можно найти в [6], из которых можно увидеть связь определённого выше в (4) функционала со следующим:

$$H(\varphi) = P e^{V(\varphi)}. \quad (11)$$

$V(\varphi)$ получается из действия отбрасыванием всего квадратичного по полям. Стоящие здесь экспоненты можно разложить в ряд:

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} P V^n / n! = \sum_{n,m=0}^{\infty} D^m V^n / 2^m m! n!, \quad (12)$$

после чего мы сопоставляем V^n граф с n вершинами, а операции D —соединение пары вершин линией с Δ . Поэтому мы получаем сумму всех диаграмм с n вершинами и m линиями. Затем им сопоставляются аналитические выражения: вершинам с k присоединёнными линиями — множители $V_k(x_1, \dots, x_k; \varphi) = \frac{\delta^k V(\varphi)}{\delta \varphi(x_1) \dots \delta \varphi(x_k)}$, которые в свою очередь сворачиваются с присоединяющимися линиями по аргументам Δ . Но не все диаграммы будут давать вклад, так как множитель в вершине может занулиться. В рассматриваемом случае во всех диаграммах будут сходиться в одной точке ровно 3 линии, а внешние вершины мы будем ампутировать. Стоит заметить, что количество вычислений сокращается, если все графы, которые отличаются лишь перестановкой вершин или линий, заменить на один, любой из них, но с приписыванием ему так называемого симметричного коэффициента. О нём речь пойдёт ниже.

Всё вышесказанное позволяет сформулировать следующие правила сопоставления диаграмме аналитического выражения в импульсном представлении:

1) каждому контуру приписывается независимый d -мерный импульс интегрирования (петлевой), стрелкой указывается его направление (мы будем обозначать их l, r, q);

2) каждой вершине сопоставляется множитель $-g_0$ и тензор d_{ijk} , а каждой линии, входящей в вершину, приписывается один из индексов соответствующего тензора;

3) внешние импульсы p_k втекают в вершины диаграммы через внешние "хвосты";

4) в каждой вершине должен выполняться закон сохранения импульсов: сумма втекающих в вершину импульсов равна сумме вытекающих из неё;

5) каждой линии с импульсом l_k сопоставляется множитель $\frac{1}{l_k^2}$ (Фурье-образ координатной линии пропагатора);

6) линии, соединяющей две вершины, от одной из которых она имеет индекс j , а от другой k , также приписывается δ_{jk} ;

7) производится интегрирование по всем петлевым импульсам, на каждую петлю дополнительно приписывается множитель $\frac{1}{(2\pi)^d}$. Приведём простой пример:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{p} \quad \text{p} \\ \text{---} \bullet \quad \bullet \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\
 \text{p-l}
 \end{array}
 = (-g_0)(2\pi)^{-d} \int dl \frac{1}{(p-l)^2 l^2} \quad (13)$$

С помощью размерных соображений (признак Коши для сходимости несобственных интегралов) можно увидеть, что данная диаграмма в исходной размерности $d = 6$ будет расходиться на бесконечности. Для того, чтобы

придать вычислениям смысл, необходимо произвести регуляризацию.

2.4 Размерная регуляризация и ультрафиолетовая мультипликативная перенормировка

Для улучшения сходимости интегралов перейдём от исходной размерности к меньшей ($d = 6 - 2\epsilon, \epsilon > 0$) и все расчёты будем проводить в ней. Это называется размерной регуляризацией. Утверждается, что расходимости можно устранить с помощью перестяжений полей и константы связи, что называется мультипликативной перенормировкой [6]. Поэтому старое действие (1) считаем затравочным, по нему определим ренормированное действие:

$$S_R = Z_1 \frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi_R^i)^2 + Z_2 \frac{g\mu^\epsilon}{6} d_{ijk} \varphi_R^i \varphi_R^j \varphi_R^k, \quad (14)$$

где использованы соотношения, определяющие константы перенормировки Z :

$$\varphi = Z_\varphi \varphi_R, \quad g = Z_g g\mu^\epsilon, \quad Z_1 = Z_\varphi^2, \quad Z_2 = Z_g Z_\varphi^3. \quad (15)$$

Здесь μ —приведённая масса, введённая для того, чтобы ренормированная константа связи оказалась безразмерной.

Можно показать, что для функционалов справедливо следующее соотношение:

$$\Gamma(\alpha) = S(\alpha) + \text{графы} \quad (16)$$

Применяя его к ренормированным функционалам и проводя операции вида $\frac{\delta^k}{\delta \alpha^k} |_{\alpha=0}$, получим необходимые функции Грина (сразу в импульсном представлении):

$$\Gamma_{2R} = Z_1 p^2 \delta_{ij} + \text{графы с 2 внешними линиями} \quad (17)$$

$$\Gamma_{3R} = Z_2 g\mu^\epsilon d_{ijk} + \text{графы с 3 внешними линиями} \quad (18)$$

Подбором констант Z можно сделать эти выражения конечными, поглотив расходимости. Оказывается, что вклад дадут только поверхностные расходимости. Графы, их содержащие, являются 1-неприводимыми (отрыв любой линии оставляет её связной, из любой вершины можно попасть в другую по линиям), имеют петли и неотрицательный УФ-индекс. В нашем случае УФ-индексом является разность размерностей числителя и знаменателя. Для выделения таких расходимостей применяется KR' —операция, пояснения о которой будут даны ниже. Результат её применения к диаграмме назовём контрчленом.

Для удобства отнормируем функции Грина, чтобы они имели ровно по одному множителю $(-g_R)$ на каждую петлю:

$$\bar{\Gamma}_n \equiv (-g)^{2-n} \Gamma_n. \quad (19)$$

Тогда мы можем вычислить константы перенормировки:

$$Z_1 = 1 + KR'[\Gamma_2], \quad Z_2 = 1 - KR'[\Gamma_3], \quad (20)$$

где под $KR'[\Gamma_n]$ подразумевается сумма всех контрчленов графов для данной функции Грина.

Для устранения произвола в выборе констант перенормировки необходимо выбрать схему вычитаний. Мы будем производить вычисления в схеме MS (минимальные вычитания), в которой сокращаются только вклады с полюсами по ϵ , поэтому константы перенормировки можно представить в виде рядов:

$$Z_a(g_R, \epsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{na}(g_R) \epsilon^{-n}. \quad (21)$$

2.5 Ренормгруппа и РГ-функции, критические индексы

Предложенная процедура перенормировки не является единственной возможностью избавиться от расходимостей в теории. Все подобные преобразования образуют ренормгруппу, которая даёт связь разных способов перенормировки. Необходимо, чтобы конечные ответы не зависели от конкретной регуляризации, то есть величины (константы связи, исходные неренормированные поля и всё, что через них выражается) являлись бы ренорминвариантными. В частности, это касается зависимости от приведённой массы μ . Введём операцию $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ по правилу:

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu \equiv \mu \partial_\mu|_e. \quad (22)$$

Дифференцирование производится при фиксированных неренормированных параметрах (в нашем случае он один — константа связи g_0). Если данной операцией подействовать на ренорминвариантную величину, то получится ноль. Используя это свойство и применяя её к функциям Грина, получают уравнения ренормгруппы. Например, если для 1-неприводимых функций Грина использовать соотношение

$$\Gamma_{nR}(x_1, \dots, x_n) = Z_\varphi^n \Gamma_n(x_1, \dots, x_n), \quad (23)$$

нетрудно получить:

$$[\tilde{\mathcal{D}}_\mu - n\gamma_\varphi] \Gamma_{nR}(x_1, \dots, x_n; \mu, g) = 0. \quad (24)$$

Здесь появляются так называемые аномальные размерности, которые для любой величины определяются как

$$\gamma_a \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_\varphi \quad (25)$$

В дополнение к этому вводится бета-функция

$$\beta_g = \tilde{\mathcal{D}}_\mu g, \quad (26)$$

которая будет входить в оператор $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$, если его расписать через ренормированные переменные. Её и аномальные размерности называют РГ-функциями.

Оказывается, что в схеме MS функции γ_a можно вычислить по формулам

$$\gamma_a = -\tilde{\mathcal{D}}_g A_{1a}, \quad (27)$$

где A_{1a} определены в (21). Из определений РГ-функций также вытекает, что

$$\beta = -g(\epsilon + \gamma_g). \quad (28)$$

У бета-функции опущен индекс, так как в рассматриваемой модели фигурирует только один ренормируемый параметр. Одной из наших задач является нахождение фиксированных точек бета-функции g_* , таких что

$$\beta(g_*) = 0. \quad (29)$$

При приближении к критической точке параметры теории приближённо описывают при помощи степенных зависимостей. Для показателей таких степеней вводятся критические индексы. Мы определим два таковых (на самом деле, их больше), но не будем вдаваться в то, как они в теории появляются. Во-первых,

$$\eta \equiv 2\gamma_\varphi(g_*), \quad (30)$$

который является аномальной размерностью парного коррелятора в скейлинговом режиме. Во-вторых,

$$\omega \equiv \beta'(g_*). \quad (31)$$

Оказывается, что если этот индекс положителен, то для функций Грина в такой теории характерно скейлинговое поведение (представляются в виде произведения размерного параметра на безразмерную функцию), и присутствует фазовый переход второго рода. Такие g_* называются ИК-притягивающими. В обратном случае ничего определённого сразу сказать нельзя, нужен дополнительный анализ. Такие точки называются ИК-отталкивающими. Так как в теории есть параметр числа компонент поля n , то производная может менять свой знак при его изменении, что означает смену характера поведения системы. Заметим, что выражение (30) для η пишется для ИК-притягивающих точек, в таких случаях он является измеряемой величиной.

3 Вычислительный аппарат

3.1 Метод вычисления простых диаграмм

Как уже было сказано выше, под диаграммами подразумеваются интегральные выражения. При их вычислении используется базовая формула, справедливая для любой размерности:

$$(2\pi)^{-d} \int (k-p)^{-2\alpha} k^{-2\beta} dk = (4\pi)^{-d/2} p^{d-2\alpha-2\beta} H(\alpha, \beta, d-\alpha-\beta), \quad (32)$$

где введены обозначения: $H(z) \equiv \frac{\Gamma(d/2-z)}{\Gamma(z)}$, $\Gamma(z)$ -гамма-функция Эйлера; $H(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \equiv H(\alpha)H(\beta)H(\gamma)\dots$. Естественно, что при вычислении диаграммы с более чем одной петлёй этой формулой можно пользоваться несколько раз, расписывая интеграл как повторный и по очереди снимая интегрирования. По форме ответа видно, что получаются гамма-функции в целых отрицательных точках, где, как известно, у них имеются полюса. Вспоминая, что мы будем интегрировать в нецелой размерности, мы можем раскладывать выражения в ряды, выделяя таким образом полюсную структуру по ϵ . Такие разложения можно без особого труда проводить в средствах компьютерных вычислений, например, в Maple.

Для более короткой записи ответов предлагается воспользоваться так называемой G -схемой — перейти от функций H к G при помощи выделения общего множителя, который потом включается в определение заряда. Определим этот переход следующим образом:

$$G(\alpha, \beta) \equiv \frac{H(\alpha, \beta, d-\alpha-\beta)\Gamma(2-2\epsilon)}{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma^2(1-\epsilon)}. \quad (33)$$

Такое определение приписывает точное выражение следующей однопетлевой диаграмме:

$$\triangle = G(1, 2)p^{-2\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon}p^{-2\epsilon}. \quad (34)$$

Также оно позволяет избавиться в результатах от постоянных Эйлера γ , хотя множители с дзета-функциями Римана $\zeta(z)$ могут появляться в сходящихся частях, а также в расходящихся частях при рассмотрении старших петель.

Как уже отмечалось при формулировке правил сопоставления графу интегрального выражения, мы должны через "хвосты" впускать внешние импульсы. У нас он всегда будет одним, так как в каждой вершине должны соединяться ровно три линии, минимум две из которых будут внутренними. Поэтому для двухвосток устраивается протечка внешнего импульса p так, чтобы в одну внешнюю линию он втекал, а из другой вытекал. Для трёхвосток можно поступать аналогично, как бы отрывая один из "хвостов", и соединять

оставшиеся. При этом неважно, каким способом всё это будет делаться, так как различия устраняются заменой переменных в интегралах. Подчеркнём, что это справедливо только под знаком R' -операции.

3.2 Интегрирование по частям (IBP Reduction)

К сожалению, даже в двух петлях не удаётся посчитать все диаграммы, используя только формулу (32). Поэтому для диаграмм 6) и 7) из Приложения необходимо воспользоваться специальным приёмом, который называется интегрированием по частям (Integration By Parts). Первыми им воспользовались А. Васильев, Ю. Письмак и Ю. Хонконен в [8], затем он упоминается в работе К. Четыркина и Ф. Ткачёва [9]. Метод основывается на использовании теоремы Остроградского-Гаусса. Если мы возьмём функцию $f(x)$ в d -мерном пространстве, которая хорошо убывает на бесконечности, и возьмём интеграл от её дивергенции $(\partial_i f)$ по всему пространству, то он сведётся к интегралу от самой функции по границе бесконечно удаленной сферы, а значит при наших договорённостях он просто занулится. Будем считать это верным и при нецелом d . Если же убывания на бесконечности нет, то вычисления производятся в так называемой формальной схеме, в которой результаты для расходящихся интегралов получаются при помощи аналитического продолжения из областей, где они сходятся. Основная идея интегрирования по частям заключается в подборе такого выражения, чтобы в его дивергенции содержался в виде слагаемого интересующий нас интеграл, который можно будет выразить через более простые. Например, для диаграммы 6) можно записать её подинтегральное выражение

$$\text{Diagram 6} = \frac{1}{(p+k)^2(p+q)^2(k-q)^2k^2q^2} \equiv \frac{1}{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5}. \quad (35)$$

и подобрать подходящую функцию

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_i} \frac{(k-q)_i}{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5} &= \frac{d-4}{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5} - \frac{1}{A_1^2 A_2 A_4 A_5} + \frac{1}{A_1^2 A_3 A_4 A_5} - \frac{1}{A_1 A_2 A_4^2 A_5} + \\ &\quad + \frac{1}{A_1 A_2 A_3 A_4^2} = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда, сопоставляя выражением обратно графы, получаем

$$\text{Diagram 6} = \frac{2}{d-4} \left(\text{Diagram 7} - \text{Diagram 8} \right), \quad (37)$$

где в правой части всё считается по (32).

Для вычислений с большим количеством петель, а также для диаграммы 7) можно воспользоваться специальным пакетом для Wolfram Mathematica — LiteRed ([10],[11]). Для его работы нужно построить некий базис из импульсов, используя которые можно записать выражения для всех диаграмм в нужном числе петель. После этого программа найдёт несколько диаграмм, которые называются мастер-интегралами (Master Integrals), к сумме которых с некоторыми коэффициентами можно свести любую диаграмму с данным числом петель, используя процедуру, описанную выше. В Приложении приведён такой базис для двух петель.

3.3 KR' -операция

Данная операция определяется как композиция двух операций. Во-первых, K —операция отбора расходящейся части, которая определяется выбором соответствующей схемы вычитаний. В случае схемы MS она задаётся на произвольных функциях $f(\epsilon, \dots)$ (где многоточием заменены остальные аргументы), которые раскладывается в ряд Лорана, и операция действует по следующему правилу:

$$K \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon^n f_n(\dots) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \epsilon^n f_n(\dots). \quad (38)$$

Во-вторых, R' —операция определяется на 1-неприводимых диаграммах (полагается, что на 1-приводимые графы её действие обнуляется), у которых она всеми способами выделяет нетривиальные непересекающиеся между собой поверхностно-расходящиеся подграфы. Каждому способу их выделения соответствует отдельный вклад, причём если таких подграфов нечётное число, то они получают дополнительный знак "минус", а для чётного числа (в том числе когда их ноль — исходная диаграмма) знак остаётся положительным. Приведём пример с тремя петлями (не из рассматриваемой теории), где пунктиром выделены подграфы, на которые действует операция

$$R' \begin{array}{c} \text{diagram} \end{array} = \begin{array}{c} \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram} + \text{diagram} \end{array} \quad (39)$$

Совместное действие этих операций задаётся следующим образом: те подграфы, на которые подействовала операция R' стягиваются в точку, в которой содержится результат вычисления KR' —операции от этого подграфа, которое выполняется аналогичным образом, пока у него не останется в качестве подграфа только он сам, когда действовать будет только операция K , и так всеми способами, после чего K дейтсвует на всё получившееся выражение. В Приложении приведены результаты после таких стягиваний. Стоит заметить, что если подграф расходится логарифмически, то после стягивания в точку там не появится дополнительного импульса, поэтому эта вершина останется, а результат KR' будет стоять перед получившейся диаграммой в качестве множителя. Если же подграф расходится, например, как p^2 , то лишний импульс будет содержаться в вершине и сократит один из тех, что даётся присоединяемой линией, поэтому в получившейся диаграмме этой вершины не будет.

3.4 Симметричные коэффициенты

Как было сказано выше, диаграммы возникают путём соединения какого-то числа вершин несколькими линиями всеми возможными способами. Можно каждый раз нумеровать вершины и фиксировать, сколькими линиями они соединяются друг с другом, тогда мы получим все нумерованные графы, каждый из которых даёт вклад в итоговый результат. Вместо этого можно рассматривать графы без нумерации вершин, но с учётом их симметрий. Так и появляются симметричные коэффициенты.

Сначала рассматриваются графы без внешних линий. Вводится матрица смежности графа π , элементы которой $\pi_{ik} = \pi_{ki}$ представляют собой число линий, соединяющих вершины i и k при какой-то определённой нумерацией вершин. Также граф может иметь свою группу симметрий, куда входят все такие перенумерации вершин, которые не меняют сам граф и его матрицу смежности; число элементов этой группы s называется симметричным числом. Этих определений достаточно, чтобы из комбинаторных соображений сосчитать симметричный коэффициент графа без внешних линий [6]

$$C_H = \left(s * \prod_{i < k} \pi_{ik}! \prod_i \pi_{ii}! * 2^{Tr\pi} \right)^{-1}. \quad (40)$$

В рассматриваемой теории фигурируют диаграммы с внешними линиями, поэтому необходимо учесть и их перестановки

$$C = C_H * n! * \prod_a \left(\frac{1}{n_a!} \right), \quad (41)$$

где индекс a нумирует только наружные вершины, то есть те, из которых

выходят "хвосты"; n_a — число выходящих из вершины a внешних линий, при этом $\sum_a n_a = n$.

3.5 Тензорные свёртки

Важную роль в рассматриваемой теории играет тензор d_{ijk} . Согласно сформулированным правилам и договорённостям о суммировании по паре одинаковых индексов, в конечных ответах должны появиться коэффициенты, возникающие из различных свёрток этих тензоров. При этом, для корректности и согласованности с (17) и (18) необходимо проверять, что вклады в Γ_2 пропорциональны δ_{ij} , а в Γ_3 — d_{ijk} .

Воспользовавшись соотношениями из (2), (30) явно получим свёртки для однопетлевых диаграмм, расставив над линиями необходимые индексы:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: } i \text{ --- } \text{loop} \text{ --- } j, \text{ with top edge } k, \text{ bottom edge } l. \\
 & d_{ikl}d_{jkl} = \sum_{\alpha,\beta} e_i^\alpha e_l^\alpha e_k^\beta e_j^\beta e_l^\beta e_k^\beta = \sum_{\alpha,\beta} e_i^\alpha e_j^\beta ((n+1)\delta^{\alpha\beta} - 1)^2 = \\
 & = (n+1)^2 \sum_{\gamma} e_i^\alpha e_j^\beta \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\gamma} - 2(n+1)\delta^{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta = (n+1)^3 \delta_{ij} - 2(n+1)^2 \delta_{ij} = \\
 & = (n+1)^2(n-1)\delta_{ij} = T_2 \delta_{ij} \quad (42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: } i \text{ --- } l \text{ --- } j, \text{ } i \text{ --- } s \text{ --- } k, \text{ } j \text{ --- } m \text{ --- } k, \text{ with internal edges } l, m, s. \\
 & d_{ils}d_{jlm}d_{ksm} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} e_i^\alpha e_j^\beta e_k^\gamma ((n+1)\delta^{\alpha\beta} - 1)((n+1)\delta^{\beta\gamma} - 1) * \\
 & ((n+1)\delta^{\alpha\gamma} - 1) = (n+1)^3 \sum_{\delta} e_i^\alpha e_j^\beta e_k^\gamma \delta^{\alpha\delta} \delta^{\beta\delta} \delta^{\gamma\delta} - 3(n+1)^2 \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \delta^{\alpha\beta} \delta^{\beta\gamma} e_i^\alpha e_j^\beta e_k^\gamma = \\
 & = (n+1)^3 d_{ijk} - 3(n+1)^2 d_{ijk} = (n+1)^2(n-2)d_{ijk} = T_3 d_{ijk} \quad (43)
 \end{aligned}$$

При этих вычислениях нужно быть аккуратнее с множителями типа $(\delta^{\alpha\beta})^2$, которые затем сворачиваются с $e^\alpha e^\beta$, что не входит в стандартное соглашение о суммировании. Тогда в таком контексте можно записать эквивалентным образом $\delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\gamma}$, после чего всё считается как обычно. Из этих вычислений видно, что они пропорциональны нужным тензорам, это верно и для всех остальных. Обозначения T_n приняты согласно [5].

Стоит отметить, что при вычислении свёрток для 2 петель, можно не расписывать полностью выражения. Если у диаграммы есть подграф вида (42) или (43), то его сразу же можно заменить на вершину, в которой содержится

результат свёртки этого подграфа, с подходящими индексами. Это же можно делать и с большим числом петель. Таким образом, счёт свёрток имеет много общего с вычислением контрчленов. Если же у диаграммы нет подграфов (7) в Приложении), то для неё появится новая свёртка, которая вычисляется аналогичным образом, описанным выше, но с большим количеством действий. Поэтому для возникающего T_5 приведён только конечный результат. В Приложении вычислены все свёртки, в скобки взяты выражения, ведущие к T_n .

4 Полученные результаты

Используя приведённые в Приложении вычисления, найдём выражения для констант перенормировки. Но сначала заметим, что множитель перед каждой диаграммой, содержащий константу связи, можно записать с помощью нового "заряда"

$$u \equiv \frac{g^2}{64\pi^3}. \quad (44)$$

Учитывая такую связь зарядов, можно пересчитать РГ-функции в терминах новой константы связи

$$\gamma_a = -2\tilde{\mathcal{D}}_u A_{1a}, \quad \beta_u = -2u(\epsilon + \gamma_g) \quad (45)$$

. Тогда в Z_1 вклад дадут графы 1), 3) и 6):

$$Z_1 = 1 + T_2 \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6\epsilon} \right) u + \frac{1}{2} \left[T_2 T_3 \left(\frac{1}{12\epsilon^2} - \frac{1}{18\epsilon} \right) + T_2^2 \left(-\frac{1}{72\epsilon^2} + \frac{11}{432\epsilon} \right) \right] u^2 + O(u^3), \quad (46)$$

$$A_{1,Z_1} = -\frac{1}{12} T_2 u + T_2 \left(\frac{11T_2}{864} - \frac{T_3}{36} \right) u^2 + O(u^3), \quad (47)$$

$$\gamma_{Z_1} = -2u \partial_u A_{1,Z_1} = \frac{1}{6} T_2 u + T_2 \left(\frac{T_3}{9} - \frac{11T_2}{216} \right) u^2 + O(u^3). \quad (48)$$

Вклады в Z_2 дают диаграммы 2), 4), 5) и 7):

$$Z_2 = 1 - T_3 \frac{u}{2\epsilon} + \left[\frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{3T_3^2}{8} - \frac{T_2 T_3}{16} \right) + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{7T_2 T_3}{96} - \frac{3T_2^2}{16} - \frac{T_5}{8} \right) \right] u^2 + O(u^3), \quad (49)$$

$$A_{1,Z_2} = -\frac{T_3}{2} u - \left(\frac{3T_2^2}{16} - \frac{7T_2 T_3}{96} + \frac{T_5}{8} \right) u^2 + O(u^3), \quad (50)$$

$$\gamma_{Z_2} = T_3 u + \left(\frac{3T_3^2}{4} - \frac{7T_2 T_3}{24} + \frac{T_5}{2} \right) u^2 + O(u^3). \quad (51)$$

С помощью (15) вычисляем критические индексы и бета-функцию

$$\gamma_\varphi = \frac{1}{2} \gamma_{Z_1} = \frac{1}{12} T_2 u + T_2 \left(\frac{T_3}{18} - \frac{11T_2}{432} \right) u^2 + O(u^3), \quad (52)$$

$$\gamma_g = \gamma_{Z_2} - 3\gamma_\varphi = \left(T_3 - \frac{T_2}{4} \right) u + \left(\frac{11T_2^2}{144} - \frac{11T_2 T_3}{24} + \frac{3T_3^2}{4} + \frac{T_5}{2} \right) u^2 + O(u^3), \quad (53)$$

$$\beta_u = -2\epsilon u + \left(\frac{T_2}{2} - 2T_3 \right) u^2 + \left(\frac{11T_2 T_3}{12} - \frac{11T_2^2}{72} - \frac{3T_3^2}{2} - T_5 \right) u^3 + O(u^4). \quad (54)$$

Фиксированная точка ищется в виде ϵ -разложения

$$u_* = a_1 \epsilon + a_2 \epsilon^2 + \dots, \quad (55)$$

которое подставляется в уравнение $\beta_u(u_*) = 0$ и исходя из этого подбираются коэффициенты a_j , чтобы ноль получался при каждой степени ϵ . Введя обозначения

$$\frac{T_2}{2} - 2T_3 \equiv 2A, \quad \frac{11T_2T_3}{12} - \frac{11T_2^2}{72} - \frac{3T_3^2}{2} - T_5 \equiv 2B, \quad (56)$$

получим

$$u_* = \frac{\epsilon}{A} - \frac{B}{A^3}\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \quad (57)$$

Вычисляя производную от (54) и подставляя после этого (57), и учитывая, что в рассматриваемой теории

$$A = (n+1)^2 \frac{7-3n}{4}, \quad B = (n+1)^4 \left[\frac{11}{24}(n-1)(n-2) - \frac{11}{144}(n-1)^2 - \frac{3}{4}(n-2)^2 - \frac{1}{2}((n+1)^2 - 6(n+1) + 10) \right], \quad (58)$$

находим индекс ω

$$\omega = 2\epsilon + \frac{2B}{A^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) = 2\epsilon + \frac{2(-125n^2 + 544n - 671)}{9(7-3n)^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (59)$$

Подставляя (57) в (52) получим индекс η

$$\eta = \frac{n^2 - 1}{3(7-3n)}\epsilon + \frac{125n^4 - 583n^3 + 787n^2 + 83n - 412}{27(7-3n)^3}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (60)$$

На практике имеет смысл рассматривать целые размерности, например, $d = 3; 4; 5$, полагая в расчётах $\epsilon = \frac{3}{2}; 1; \frac{1}{2}$ соответственно. В Приложении построены графики зависимости вычисленных индексов от n в заявленных выше размерностях. Сразу отметим, что во всех случаях присутствует полюсная особенность в точке $n_0 = \frac{7}{3}$.

Рассмотрим графики для ω , которые представлены на Рис.1,2,3. Они имеют схожий характер, индекс уменьшается при подходе слева к n_0 , справа же от неё наблюдается рост, который затем выходит на асимптотику. Но для $d = 3; 4$ ω отрицателен, следовательно в них фиксированные точки ИК-отталкивающие. Для $d = 5$ обнаруживаются две критические точки смены знака, которые найдены, решая квадратное уравнение относительно n :

$$n_{cr1} = \frac{106}{37} - \frac{3}{37}\sqrt{381} \approx 1.2822, \quad n_{cr2} = \frac{106}{37} + \frac{3}{37}\sqrt{381} \approx 4.4475. \quad (61)$$

Соответственно, для $n < n_{cr1}$ и $n > n_{cr2}$ фиксированные точки являются ИК-притягивающими, из чего следует наличие скейлингового поведения и фазового перехода второго рода.

Выражение (30) имеет смысл только для ИК-притягивающих фиксированных точек, однако мы проводили вычисления с учётом только двух степеней по ϵ . Если рассматривать диаграммы с большим числом петель, можно получить дальнейшие члены разложения, и может оказаться, что ИК-притягивающие точки могут появиться в других размерностях, поэтому на Рис.4,5,6 представлены графики зависимостей индекса η от n для всех заявленных размерностей. Сравнивая их, видно, что они тоже очень похожи друг на друга. Заметим, что для $n = 1$ этот индекс обращается в ноль в каждой размерности, так как содержит в виде множителя $T_2 = (n + 1)^2(n - 1)$.

5 Заключение

В данной работе было произведено исследование критических явлений в простейшей модели Поттса с использованием методов квантовополево́й ренормгруппы в двухпетлевом приближении. Полученные результаты вычисления диаграмм и их контрчленов согласуются с [6], где рассмотрен только скалярный случай. Найденные выражения для РГ-функций совпадают с приведёнными в [5], с учётом различий в их определениях. Были найдены фиксированные точки бета-функции, установлено, что в сделанном приближении только для размерности $d = 5$ они могут быть ИК-притягивающими для определённых n .

Приложение. Произведённые вычисления

Здесь приведены диаграммы в одной и двух петлях, которые содержит рассматриваемая теория. Для каждой из них указано её выражение через G -функции (33), которые затем разложены в ряды по ϵ . После этого посчитаны контрчлены при помощи KR' -операции, записи имеют форму (39), где уже выполнено стягивание подграфа в точку и учтено сделанное при описании процедуры замечание, связанное со степенью расходящегося импульса подграфа. Для однопетлевых диаграмм 1) и 2), а также 7), такое вычисление не выписано, так как они не содержат подграфов, поэтому для окончательного результата нужно просто взять расходящуюся часть от полученных для них выражений. Ниже приводится таблица, в которой для каждого графа собраны его контрчлен, симметричное число s и симметричный коэффициент C , вычисляемый с помощью (41), а также стоящий перед ним в итоговом выражении заряд в соответствующей степени, записанный через $u \equiv \frac{g^2}{64\pi^3}$.

$$1) \text{---} \text{---} \text{---} = G(1, 1)p^{2-2\epsilon} = \left(-\frac{1}{6}\epsilon^{-1} - \frac{1}{9} - \frac{2}{27}\epsilon + O(\epsilon^2)\right)p^{2-2\epsilon} \quad (62)$$

$$2) \text{---} \text{---} \text{---} = G(1, 2)p^{-2\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon}p^{-2\epsilon} \quad (63)$$

$$3) \text{---} \text{---} \text{---} = G(1, 1)G(1, \epsilon + 1)p^{2-4\epsilon} = \left(\frac{1}{72}\epsilon^{-2} + \frac{19}{432}\epsilon^{-1} + \frac{319}{2592} + \left(\frac{5407}{15552} - 1/12 \zeta(3)\right)\epsilon + O(\epsilon^2)\right)p^{2-4\epsilon} \quad (64)$$

$$KR'(\text{---} \text{---} \text{---}) = \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} * KR'(\text{---} \text{---} \text{---}) = -\frac{1}{72\epsilon^2} + \frac{11}{432\epsilon} \quad (65)$$

$$4) \text{---} \text{---} \text{---} = G(1, 2)G(1, 2 + \epsilon)p^{-4\epsilon} = \left(\frac{1}{8}\epsilon^{-2} + \frac{1}{16}\epsilon^{-1} + \frac{15}{32} + \left(-3/4 \zeta(3) + \frac{69}{64}\right)\epsilon + O(\epsilon^2)\right)p^{-4\epsilon} \quad (66)$$

$$KR'(\text{---} \text{---} \text{---}) = \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} * KR'(\text{---} \text{---} \text{---}) = -\frac{1}{8\epsilon^2} + \frac{1}{16\epsilon} \quad (67)$$

$$5) \text{---} \text{---} \text{---} = G(1, 1)G(1, 2 + \epsilon)p^{-4\epsilon} = \left(-\frac{1}{24}\epsilon^{-2} - \frac{7}{144}\epsilon^{-1} - \frac{163}{864} + \left(1/4 \zeta(3) - \frac{2515}{5184}\right)\epsilon + O(\epsilon^2)\right)p^{-4\epsilon} \quad (68)$$

$$KR'(\text{---} \text{---} \text{---}) = \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} * KR'(\text{---} \text{---} \text{---}) = \frac{1}{24\epsilon^2} - \frac{7}{144\epsilon} \quad (69)$$

$$\begin{aligned}
6) \text{ (diagram)} &= \frac{1}{1-\epsilon} \left(\text{diagram 1} - \text{diagram 2} \right) = \frac{1}{1-\epsilon} \left(G(1,1)G(1,2) - G(1,1)G(2,\epsilon) \right) p^{2-4\epsilon} = \\
&= \left(-\frac{1}{12\epsilon^2} - \frac{1}{6\epsilon} - \frac{7}{24} + O(\epsilon) \right) p^{2-4\epsilon} = \quad (70)
\end{aligned}$$

$$KR'(\text{diagram}) = \text{diagram} - 2 \text{ (diagram)} * KR'(\text{diagram}) = \frac{1}{12\epsilon^2} - \frac{1}{18\epsilon} \quad (71)$$

$$7) \text{ (diagram)} \quad (72)$$

При счёте этой диаграммы использовался пакет LiteRed. В нём был задан упорядоченный набор импульсов $[p-l], [l-r], [p-r], l, r$, где p считался внешним, а l и r — внутренними. Программа определила такой базис корректным и выдала следующий мастер-интегралы:

$$\begin{aligned}
\text{diagram} &= G(1,1)G(1,\epsilon-1)p^{6-4\epsilon} = \left(-\frac{1}{1440}\epsilon^{-1} - \frac{211}{86400} - \frac{35971}{5184000}\epsilon + \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{6064831}{311040000} + \frac{1}{240}\zeta(3) \right) \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \right) p^{6-4\epsilon} \quad (73)
\end{aligned}$$

$$\text{diagram} = G^2(1,1)p^{4-4\epsilon} = \left(\frac{1}{36}\epsilon^{-2} + \frac{1}{27}\epsilon^{-1} + \frac{1}{27} + \frac{8}{243}\epsilon + O(\epsilon^2) \right) p^{4-4\epsilon} \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
\text{diagram} &= \left(4 - \frac{6}{\epsilon} \right) \text{diagram} + \left(-\frac{240}{\epsilon^2} + \frac{684}{\epsilon} - 474 + O(\epsilon) \right) \text{diagram} = \left(\frac{1}{4\epsilon} + O(1) \right) p^{6-4\epsilon} \\
&\quad (75)
\end{aligned}$$

граф	u^l	контрчлен	s	C
1)	u	$-\frac{1}{6\epsilon}$	2	$\frac{1}{2}$
2)	u	$\frac{1}{2\epsilon}$	6	1
3)	u^2	$-\frac{1}{72\epsilon^2} + \frac{11}{432\epsilon}$	2	$\frac{1}{2}$
4)	u^2	$-\frac{1}{8\epsilon^2} + \frac{1}{16\epsilon}$	2	3
5)	u^2	$\frac{1}{24\epsilon^2} - \frac{7}{144\epsilon}$	2	$\frac{3}{2}$
6)	u^2	$\frac{1}{12\epsilon^2} - \frac{1}{18\epsilon}$	4	$\frac{1}{2}$
7)	u^2	$\frac{1}{4\epsilon}$	12	$\frac{1}{2}$

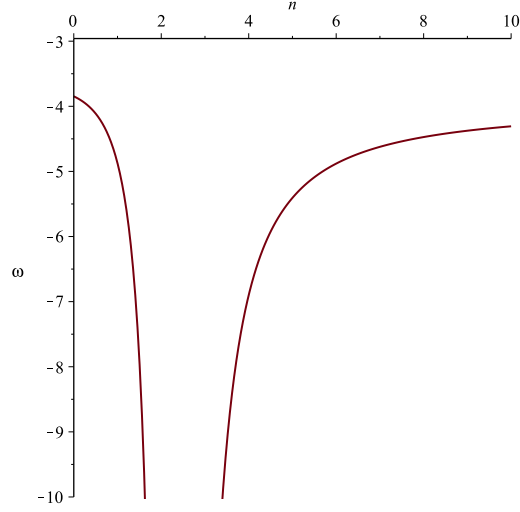


Рис. 1: Индекс ω для $d = 3$.

Ниже подсчитаны тензорные свёртки для диаграмм согласно принятой выше нумерации. При помощи скобок указано, какие тензоры нужно свернуть для получения конструкций вида (42) или (43).

$$1) d_{ikl} d_{jkl} = (n+1)^2 (n-1) \delta_{ij} = T_2 \delta_{ij} \quad (76)$$

$$2) d_{ils} d_{jlm} d_{ksm} = (n+1)^2 (n-2) d_{ijk} = T_3 d_{ijk} \quad (77)$$

$$3) (d_{ikm} d_{lks} d_{nms}) d_{jnl} = T_3 d_{iln} d_{jnl} = T_2 T_3 \delta_{ij} = (n+1)^4 (n-1) (n-2) \delta_{ij} \quad (78)$$

$$4) d_{ikl} d_{jlp} (d_{kmn} d_{pmn}) = T_2 d_{ikl} d_{jlp} \delta_{kp} = T_2^2 \delta_{ij} = (n+1)^4 (n-1)^2 \delta_{ij} \quad (79)$$

$$5) d_{ilm} d_{kmr} (d_{jns} d_{lpn} d_{rps}) = T_3 d_{ilm} d_{kmr} d_{jlr} = T_3^2 d_{ijk} = (n+1)^4 (n-2)^2 d_{ijk} \quad (80)$$

$$6) d_{iln} d_{jlm} d_{kms} (d_{npr} d_{spr}) = T_2 d_{iln} d_{jlm} d_{kms} \delta_{ns} = T_2 T_3 d_{ijk} = (n+1)^4 (n-1) (n-2) d_{ijk} \quad (81)$$

$$7) d_{ilm} d_{jrs} d_{knp} d_{lrn} d_{smp} = (n+1)^4 ((n+1)^2 - 6(n+1) + 10) d_{ijk} = T_5 d_{ijk} \quad (82)$$

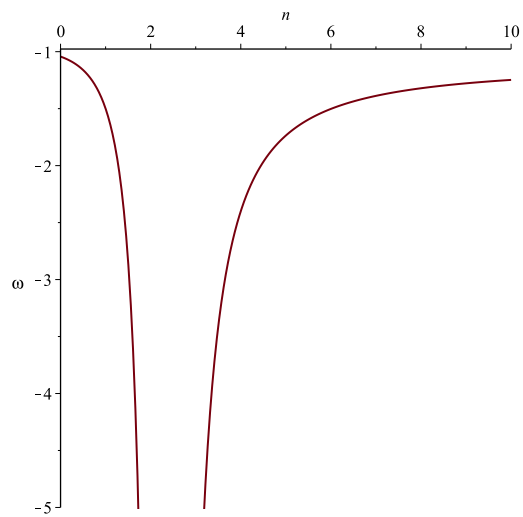


Рис. 2: Индекс ω для $d = 4$.

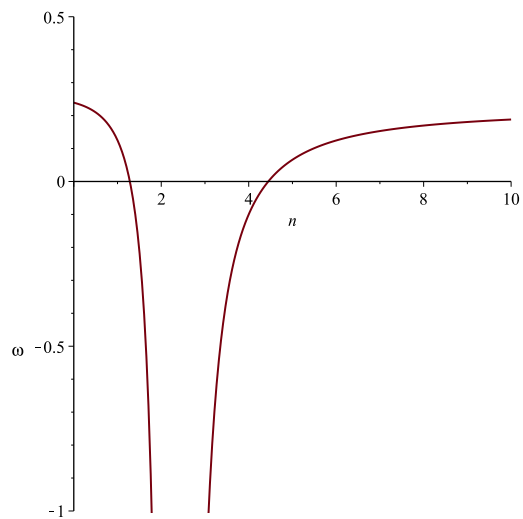


Рис. 3: Индекс ω для $d = 5$.

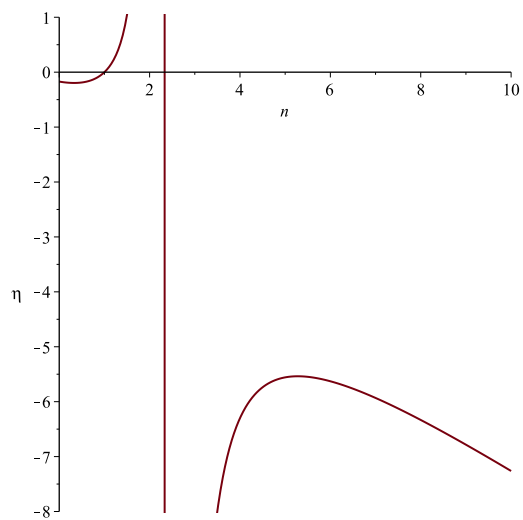


Рис. 4: Индекс η для $d = 3$.

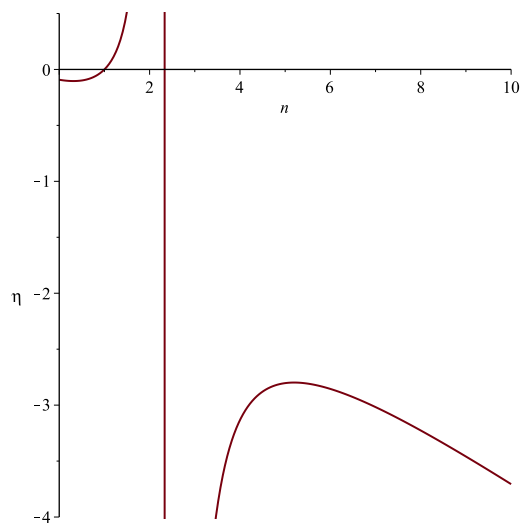


Рис. 5: Индекс η для $d = 4$.

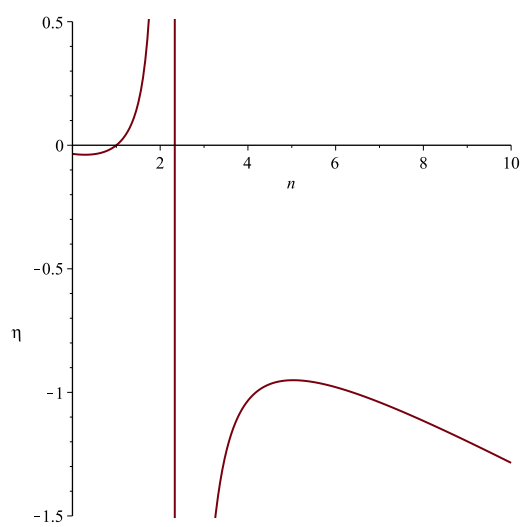


Рис. 6: Индекс η для $d = 5$.

Список литературы

- [1] Potts R B, 1952 *Proc. Camb. Phil. Soc.* **48** 106
- [2] Kramers H A and Wannier G H, 1941 *Phys. Rev.* **60** 252, 263
- [3] t'Hooft G and Veltman H, 1972 *Nucl. Phys.* **B44** 189
- [4] Amit J A, 1976 *J. Phys.* **A9** 1441
- [5] Gracey J A, 2015 *Phys. Rev.* **D92** 025012
- [6] А.Н.Васильев, 1998 *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике* (Издательство Петербургского института ядерной физики (ПИЯФ), Санкт-Петербург)
- [7] Zia R K P and Wallace D J, 1975 *J. Phys.* **A8** 1495
- [8] А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен, *ТМФ* Том 47, №3 июнь, 1981
- [9] K,G. Chetyrkin, F.V. Tkachov, 1981 *Nucl. Phys.* **B192**, 159
- [10] Lee R N, 2012, arXiv:1212.2685 [hep-ph]
- [11] Lee R N, 2014 *J. Phys. Conf. Ser.* **523** 012059